OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1910. N° 2.

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ET DES ÉQUATIONS

PAR

J.-P. GRAM

Dans la présente communication je vais exposer un théorème que je crois nouveau et qui peut s'énoncer ainsi:

Soit $f(x)$ une fonction réelle uniforme qui reste finie et intégrable dans l'intervalle de a à b, et supposons que l'intégrale

$$\int_a^b x^i f(x)\, dx$$

s'annule pour toutes les valeurs

$$i = 0,\ 1,\ 2 \ldots n-1;$$

la fonction $f(x)$ aura au moins n variations de signe dans l'intervalle de a à b.

Si $f(x)$ n'a pas de discontinuités, l'équation

$$f(x) = 0$$

aura au moins n racines réelles dans cet intervalle.

D'abord, il est évident qu'en vertu de l'égalité

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0$$

$f(x)$ doit changer de signe au moins une fois quand x passe de a jusqu'à b. Posons que le changement ait lieu pour $x = \alpha$. S'il n'y a pas d'autres variations, la fonction

$$(x - a) f(x)$$

conservera le même signe pour $a < x < b$.

Mais si l'égalité

$$\int_a^b x f(x)\, dx = 0$$

a lieu également, on aura en outre

$$\int_a^b (x - a) f(x)\, dx = 0.$$

Il faut donc que $(x - a) f(x)$ change de signe au moins une fois dans l'intervalle — supposons que ce soit pour $x = \beta$ — ce qui ne peut avoir lieu que s'il y a au moins deux variations dans les signes de la fonction $f(x)$ elle-même.

En outre l'égalité

$$\int_a^b x^2 f(x)\, dx = 0$$

implique que

$$\int_a^b (x - a)(x - \beta) f(x)\, dx = 0$$

et que $f(x)$ a au moins une variation de plus. On peut continuer de la même manière et démontrer complètement par induction le théorème en question.

Il va sans dire que le même raisonnement subsiste encore dans des conditions plus étendues. En premier lieu, on peut introduire sous le signe intégral un facteur $V(x)$ de signe invariable, ensuite on peut substituer à x^i une suite de fonctions X_i positives et choisies arbitrairement, pourvu qu'elles remplissent cette condition que l'expression

$$a_0 X_0 + x_1 X_1 + \dots a_i X_i$$

puisse, par un choix convenable des constantes $a_0 \dots a_i$, s'annuler pour i valeurs arbitraires $\alpha, \beta \dots$ de x, situées dans l'intervalle de a à b, et pas pour d'autres.

Avec cette restriction les égalités

$$\int_a^b V(x) f(x) X_i \, dx = 0, \ (i = 0, 1, \ldots (n-1))$$

impliquent que $f(x)$ change de signe au moins n fois dans le dit intervalle.

A cause de son caractère élémentaire le théorème général admet un assez grand nombre d'applications. Je me bornerai à attirer l'attention sur les développements en série procédant suivant des fonctions orthogonales qui satisfont à la condition générale exprimée par l'égalité suivante:

$$\int_a^b \psi_i(x) \, \psi_n(x) \, dx = 0, \quad \left(i \gtrless n\right)$$

et que j'ai traitées pour la première fois au point de vue systématique dans ma thèse de doctorat de 1879.

Quand les fonctions $\psi_i(x)$ sont du type général que voici:

$$\psi_i(x) = V(x) \, (a_0 + a_1 x + \ldots a_i x^i)$$

et que $V(x)$ ne change pas de signe dans l'intervalle, on aura toujours un système d'égalités de la forme suivante:

$$\int_a^b \psi_n(x) \cdot x^i \, dx = 0, \ (i = 0, 1, \ldots (n-1))$$

et l'égalité $\psi_n(x) = 0$ aura donc toujours n racines réelles. Ce fait est bien connu dans plusieurs cas particuliers. En outre, si l'on construit le développement

$$f(x) = A_0 \psi_0(x) + A_1 \psi_1(x) + \ldots$$

et qu'on l'arrête aux n premiers termes, on aura

$$\int_b^a \left(f(x) - \sum_0^{n-1} A_i \, \psi_i(x) \right) \psi_k(x) = 0, \ \ (k \overline{\overline{<}} n-1).$$

Mais alors existent aussi les égalités:

$$\int_b^a \left(f(x) - \sum_0^{n-1} A_i \, \psi_i(x) \right) V(x) \, x^k \, dx = 0, \ \ (k \overline{\overline{<}} n-1)$$

d'où l'on conclut que la différence

$$f(x) - \sum_0^{n-1} A_i \psi_i(x),$$

c-à-d. le reste de la série s'annule pour au moins n points dans l'intervalle de a à b.

On peut envisager la chose d'une manière encore plus élémentaire.

Supposons donnée une suite de nombres

$$u_1, u_2 \ldots u_x \ldots u_n,$$

correspondant à des arguments $x = 1, 2 \ldots n$.

L'égalité

$$\sum u_x = 0$$

va donc entraîner une variation, au moins, dans les signes des nombres u_x. On peut supprimer cette variation en multipliant les termes de la suite par les nombres $x - a$, en choisissant convenablement le nombre a. L'existence de l'égalité

$$\sum x u_x = 0$$

à côté de

$$\sum u_x = 0$$

conduit donc à la conclusion qu'il y a au moins deux variations dans les signes de u_x, etc.

Ainsi l'existence d'une série d'égalités:

$$\sum u_x = 0, \quad \sum x u_x = 0, \ldots \quad \sum x^{n-1} u_x = 0,$$

donnera lieu à au moins n variations de signe dans la suite des u_x.

Dans la théorie des erreurs on arrive à des égalités de cette forme quand on se propose d'ajuster une série d'observations o_x suivant une formule algébrique

$$f(x) = a + bx + cx^2 + \ldots,$$

en appliquant la méthode des moindres carrés.

Car la condition générale:

$$\sum p_x (f(x) - o_x)^2 = \text{minimum}$$

conduit à une série d'équations de la forme

$$\sum p_x (f(x) - o_x)\, x^i = 0.$$

On peut donc affirmer immédiatement qu'après l'ajustement la série de différences

$$f(x) - o_x$$

présentera un nombre de variations de signe au moins égal à celui des équations dites „normales".

De même on peut remarquer que les „fonctions libres" — comme les appelle M. Thiele — qui sont représentées par les premiers membres des „équations transformées", n'auront, sous les dites conditions, que des racines réelles.

Comme dernière application nous allons considérer le problème qui consiste à déterminer n valeurs

$$z_1,\ z_2 \ldots\ z_n$$

avec des poids respectifs

$$v_1,\ v_2 \ldots\ v_n$$

et remplissant les conditions suivantes:

$$\begin{aligned}
\sum v_\nu &= \sum y_x &&= s_0, \\
\sum z_\nu v_\nu &= \sum x\, y_x &&= s_1, \\
\sum z_\nu^2 v_\nu &= \sum x^2 y_x &&= s_2, \\
&\vdots && \vdots \\
\sum z_\nu^{2n-1} v_\nu &= \sum x^{2n-1} y_x &&= s_{2n-1},
\end{aligned}$$

les y_x désignant des grandeurs données dont le nombre surpasse n.

Pour résoudre ce problème on admet que les (z) sont les racines de l'équation

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots A_n z^n = 0.$$

On obtient alors n équations linéaires:

$$A_0 s_i + A_1 s_{i+1} + A_2 s_{i+2} + \dots A_n s_{i+n} = 0, \quad (i = 0, \dots n-1)$$

pour la détermination des coefficients (A).

Mais ces équations linéaires peuvent s'écrire

$$A_0 \sum x^i y_x + A_1 \sum x^{i+1} y_x + \dots + A_n \sum x^{i+n} y_x$$
$$= \sum x^i f(x) y_x = 0, \quad (i = 0, 1, 2 \ (n-1)).$$

Et de là on peut inférer que dans le cas où tous les nombres y_x sont positifs, l'équation

$$f(z) = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 & \dots z^n \\ s_0 & s_1 & s_2 & \dots s_n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots s_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots s_{2n-1} \end{vmatrix} = 0$$

aura toutes ses racines réelles, pourvu que ces racines se trouvent situées en dedans des limites des nombres x.

S'il y a des variations dans les signes des y_x, un nombre correspondant des racines de $f(z) = 0$ échappera aux conditions susdites.